L3 SM	Université de Tours	Année 2014-2015

Mécanique quantique

12/05/2015 **durée de l'examen: 2h**

1. La cathode d'une cellule photoélectrique est éclairée avec une lumière monochromatique, de longueur d'onde $\lambda = 546$ nm (raie verte du mercure). Cet éclairement a pour effet l'apparition d'un courant électrique dans la cellule.

   - Pour une photocathode en potassium, dont l'énergie d'ionisation est 2 eV, calculer la longueur d'onde du seuil photoélectrique et l'énergie cinétique maximale des électrons que peut extraire un tel rayonnement de la cathode. En déduire la vitesse maximale des électrons arrachés. *Rappels*: $e \approx -1.6 \cdot 10^{-19}$ C, $m_e \approx 9.1 \cdot 10^{-31}$ kg, $\hbar \approx 1.05 \cdot 10^{-34}$ J·s, $c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s.

2. Soient $|\ell, m\rangle$ les états propres communs normalisés des opérateurs L^2, L_z, et soit

   $$|\psi\rangle = C\Big(3|0,0\rangle - |1,0\rangle + 2|2,1\rangle - i|2,-1\rangle\Big).$$

   un état normalisé: $\langle\psi|\psi\rangle = 1$.

   - Calculer la constante de normalisation C.
   - Quels sont les résultats possibles de la mesure de L_z ? Déterminer la probabilité de chaque valeur admissible.
   - Déterminer la valeur moyenne de L^2 dans l'état $|\psi\rangle$.

3. Considérons une particule en dimension 1 dans le potentiel suivant:

   $$V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}m\omega^2x^2 & \text{pour } x > 0, \\ +\infty & \text{pour } x < 0. \end{cases}$$

   - Tracer schématiquement le potentiel en fonction de x. Le spectre de l'hamiltonien $\hat{H}$ correspondant est-il discret ou continu? dégénéré ou non-dégénéré? Argumenter votre réponse.
   - Ecrire l'équation de Schroedinger stationnaire vérifiée par la fonction d'ondes $\psi(x)$, ainsi que les conditions au bord qu'elle vérifie.
   - En utilisant ce que vous savez sur l'oscillateur harmonique quantique, décrire le spectre de $\hat{H}$ (les valeurs propres de l'énergie et les fonctions propres correspondantes). Argumenter.

4. Soit une particule dans un potentiel de l'oscillateur harmonique en dimension 1:

   $$\hat{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2x^2}{2} = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right),$$

   où $a^\dagger$, a notent les opérateurs de création-annihilation. A l'instant $t = 0$, la particule est caractérisé par la même probabilité de mesure des énergies E_n et E_m, avec $n > m$.

   - Donner un exemple d'état (c'est-à-dire, la fonction d'onde $\psi(x,t)$) qui a cette propriété.
   - Calculer la vitesse de la particule en fonction du temps t, où la vitesse est définie par

   $$v = \frac{d\langle x\rangle}{dt}.$$

- Discuter la dépendance du résultat de m et n.

  Rappel: $a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\, x - \frac{ip}{\sqrt{2m\omega\hbar}}$, $a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\, x + \frac{ip}{\sqrt{2m\omega\hbar}}$.

5. L'objet de cet exercice est l'"oscillateur harmonique" d'un autre type. Il est caractérisé par l'hamiltonien

$$\hat{H} = \hbar\omega\, b^\dagger b,$$

où b, $b^\dagger$ vérifient des relations d'anti-commutation:

$$\{b, b^\dagger\} = 1, \qquad \{b, b\} = \{b^\dagger, b^\dagger\} = 0,$$

avec $\{X, Y\} := XY + YX$ ("anti" correspond au signe "+" devant YX).

- Vérifier que $b^2 = (b^\dagger)^2 = 0$.
- Montrer que $\hat{H}^2 = \hbar\omega\hat{H}$. En déduire le spectre de $\hat{H}$.
- Soit $|\phi_0\rangle$ un état annihilé par l'opérateur b et soit $|\phi_1\rangle := b^\dagger|\phi_0\rangle$. Montrer que $|\phi_0\rangle$, $|\phi_1\rangle$ sont des vecteurs propres de $\hat{H}$ et calculer les valeurs propres associées.
- Proposer une réalisation des opérateurs b, $b^\dagger$ en termes de matrices de taille 2×2.